PRÁCTICA 7

FUNCIÓN CARACTERÍSTICA, LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS Y TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Ejercicio 1. Sea X una variable aleatoria con $X \sim \mathcal{G}(p)$. Hallar $\varphi_X(t)$.

Ejercicio 2. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con $X_i \sim \mathcal{G}(p)$, $1 \leq i \leq n$. Hallar $\varphi_X(t)$, siendo $X = X_1 + \cdots + X_n$.

Ejercicio 3. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con $X_i \sim \varepsilon(\lambda)$. Hallar $\varphi_X(t)$, siendo $X = X_1 + \cdots + X_n$.

Ejercicio 4. Sean X e Y variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas. Probar que

$$\varphi_{X-Y}(t) = |\varphi_X(t)|^2.$$

Ejercicio 5. Sea X variable aleatoria con densidad integrable $f_X(x) = \frac{1}{2}\exp^{-|x|}$, $x \in \mathbf{R}$. Probar que

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Ejercicio 6.

a) Sea $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, encuentre la función característica de X.

b) Muestre usando funciones características que si $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ e $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ independientes entre sí, entonces $X + Y \sim B(m+n, p)$.

Ejercicio 7. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes. Pruebe que si

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \alpha \quad y \quad \lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0,$$

entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \alpha$.

Ejercicio 8. Pruebe que si $X_1, X_2, \dots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con $E(X_i) = 1 = Var(X_i)$ $\forall\, i \in \mathbf{N}$, entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 9. Sean $X_1, \dots$ independientes con distribución común $N(0,1)$. Cuál es el límite casi cierto de

$$\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{(X_1-1)^2 + \cdots + (X_n-1)^2}.$$

Ejercicio 10. Se dispone de 100 números con cuatro decimales que se convierten en enteros por redondeo. Supongamos que el error de redondeo cometido en un número es una variable aleatoria uniforme en el intervalo [-1/2,1/2]. Si se suman los 100 números, calcular utilizando el teorema central del límite la probabilidad de que el error de redondeo de la suma exceda en valor absoluto a a) 1 b) 5.

Ejercicio 11. Supongamos que una empresa fabrica computadores con cuatro circuitos impresos. Sea p_i la probabilidad de que un computador enviado a reparar necesite i circuitos nuevos. Se sabe que $p_1 = 1/2$,

$p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/8$, $p_4 = 1/8$. Se envían 10000 unidades a reparar al año. ¿Cuál es la probabilidad de necesitar más de 18875 circuitos?.

Ejercicio 12. Una compañía aérea, observando que, en promedio, el 12% de las plazas reservadas no se cubren (“no show"), decide aceptar reservas por un 10% más de las plazas disponibles en aviones de 450 plazas. Calcular la proporción de vuelos en que algún pasajero con reserva no tiene plaza. (Indicar las hipótesis hechas para resolver el problema).

Ejercicio 13. La duración (en horas) de ciertos tubos eléctricos tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1/192$. Disponemos de un stock de 40 tubos para iluminar una habitación con uno de dichos tubos. Los tubos se sustituyen inmediatamente al no funcionar. Calcular aproximadamente la probabilidad de que al cabo de un año tengamos luz.

Ejercicio 14. Una señora juega 2 pesos a la quiniela una vez por semana, apostando al 22 a la cabeza. Si sale el 22 la señora gana 140 pesos, si no sale pierde los 2 pesos. Sea G_n la ganancia en la semana n. Al cabo de n semanas su ganancia será

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$$

que bien puede ser negativa. Hallar la distribución de G. Ayuda: Suponga que la quiniela sortea sobre 100 posible numeros y use el Teorema Central del Límite.

Ejercicio 15. Se sabe que el 10% de las personas de una ciudad simpatiza con el partido A. Se selecciona aleatoriamente 100 individuos. Aproximar la probabilidad de que como máximo entre los 100 entrevistados haya 8 simpatizantes del partido A.

Ejercicio 16. Se tira un dado 100 veces en forma independiente. Usando la aproximación normal hallar:

a) La probabilidad de que el número 6 salga entre 15 y 20 veces.

b) La probabilidad de que la suma de los resultados de las 100 tiradas del dado sea menor que 300.

Ejercicio 17. En una tabaquería, la demanda de cajas de habanos es $\mathcal{P}(2)$. Cada mañana el dueño completa su stock para tener 2 cajas. Cada caja le da una ganancia de \$20. Cuando reúna la suma de \$1200 se va de vacaciones a La Falda. No trabaja los domingos y empieza a trabajar el día 10 de noviembre.

a) Calcular la probabilidad de que pueda irse de vacaciones el día 22 de diciembre por la mañana.

b) Calcular una fecha f_0 tal que la probabilidad de que pueda partir en f_0 sea aproximadamente 0.95.

Ejercicio 18. Una fábrica tiene rollos de tela puestos a la venta. Se sabe que los metros de tela de una tercera parte de ellos tiene distribución $\mathcal{U}[10,30]$ y el número de metros de tela de los rollos restantes tiene una distribución $\mathcal{U}[20,30]$. Una tienda compró 30 rollos de tela.

a) Calcular la probabilidad de que un rollo elegido al azar contenga más de 20 metros de tela.

b) Calcular la probabilidad de que la tienda haya comprado por lo menos 650 metros de tela.

c) Calcular cuántos rollos debería comprar la tienda para que la probabilidad de adquirir por lo menos 800 metros de tela sea 0.95.